214 - Théorème d'inversion locale. Théorème des fonctions implicites. Exemples et applications en analyse et en géométrie.

Prérequis : Différentiabilité sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

I Théorème d'inversion locale

1) Énoncé et premières variantes

Définition 1. Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^p$ et V un ouvert de $\mathbb{R}^q$, pour $p, q \in N[\star]$. Une application $f : U \to V$ est un difféomorphisme de classe $\mathcal{C}^k$ si elle est bijective de réciproque $\mathcal{C}^k$.

Exemple 2. *Tout intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ est difféomorphe à $\mathbb{R}$.*

Théorème 3 (Théorème d'inversion locale)**.** *Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $a \in U$ et $f : U \to \mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^k$. On suppose que la matrice jacobienne $Df(a)$ est inversible. Il existe alors un ouvert $V \subset U$ contenant a tels que $f|_V$ soit un difféomorphisme de classe $\mathcal{C}^k$ de V sur $f(V)$.*

Exemple 4. *L'application $f : (x, y) \mapsto (x^2 - y^2, 2xy)$ est un difféomorphisme de classe $\mathcal{C}^k$ au voisinage de tout point de $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.*

Remarque 5. *L'équation $f(x) = y$ admet une unique solution dans V donnée par $x = f^{-1}(y)$, mais pas en dehors de V.*

Définition 6. Un difféomorphisme local est une application de classe $\mathcal{C}^k$ d'un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ dont la différentielle en tout point est inversible.

Remarque 7. *Dans le théorème d'inversion locale, on dit alors que f est un $\mathcal{C}^k$-difféomorphisme local en a.*

Exemple 8. *L'application $(r, \theta) \mapsto (r \cos\theta, r \sin\theta)$ est un difféomorphisme local de $]0, +\infty[\times\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.*

Théorème 9 (Théorème d'inversion globale)**.** *Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : U \to \mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^1$. On suppose que f est injective sur U et que, pour tout $x \in U$, la matrice jacobienne $Df(x)$ est inversible. Alors $f(U)$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, et f est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de U sur $f(U)$.*

Contre-exemple 10. *La fonction* $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \longmapsto & (x^2 - y^2, 2xy) \end{array} \right.$ *est un difféomorphisme local au voisinage de tout point de $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, mais n'est pas un difféomorphisme global.*

2) Applications

Changement de coordonnées

Définition 11. On appelle changement de coordonnées sur $V \subset \mathbb{R}^n$ la donnée de n fonctions $f_1, \ldots, f_n : V \to \mathbb{R}$ telles que $f = (f_1, \ldots, f_n)$ soit un difféomorphisme $\mathcal{C}^1$ de V sur $f(V)$.

Théorème 12. *Soient $f_1, \ldots, f_n$ des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ au voisinage de $a \in \mathbb{R}^n$. Les relations $u_i = f_i(x_1, \ldots, x_n)$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$ définissent un changement de coordonnées sur un voisinage de a si, et seulement si, le déterminant jacobien est non nul.*

Racine k-ième d'une matrice

Application 13. *Soient $k \in \mathbb{N}^\star$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Si A est suffisamment proche de I_n, alors il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $B^k = A$.*

Lemme de Morse

Lemme 14. *Soit $A_0 \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R}) \cap \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Alors il existe un voisinage V de A_0 dans $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\rho : V, \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que pour tout $A \in V$, on a ${}^t\rho(A) A_0 \rho(A)$.*

Théorème 15 (Lemme de Morse)**.** *Soient $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un ouvert, $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^3$, telle que $df_0 = 0$ et $d^2 f_0$ est non dégénérée de signature $(p, n - p)$. Alors il existe deux voisinages de l'origine dans $\mathbb{R}^n$, liés par un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme $\varphi : x \mapsto u$, avec $\varphi(0) = 0$ et :*

$$f(x) - f(0) = u_1^2 + \ldots + u_p^2 - u_{p+1}^2 - \ldots - u_n^2 = \sum_{i=1}^{p} u_i^2 - \sum_{i=p+1}^{n} u_i^2$$

II Théorème des fonctions implicites

1) Énoncé du théorème

Théorème 16 (Théorème des fonctions implicites)**.** *Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$, (a, b) un point de U, et $f : U \to \mathbb{R}^p$ une application de classe $\mathcal{C}^1$. On suppose que $f(a, b) = 0$ et que la matrice jacobienne $D_y f(a, b)$, formée des dérivées partielles par rapport à y, est inversible. Alors l'équation $f(x, y) = 0$ peut être résolue localement par rapport aux variables y :*

il existe un voisinage ouvert V de a dans $\mathbb{R}^n$, un voisinage ouvert W de b dans $\mathbb{R}^p$, avec $V \times W \subset U$, et une application $\varphi : V \to W$, de classe $\mathcal{C}^1$, unique, telle que :

$$(x \in V,\, y \in W \; et \, f(x,y) = 0) \Leftrightarrow (x \in V \; et \, y = \varphi(x))$$

Exemple 17. *L'équation $x^2+y^2-1=0$ définit deux fonctions implicites :*

$$\varphi_1 : \left| \begin{array}{ccc}]-1,1[& \longrightarrow &]0,+\infty[\\ x & \longmapsto & \sqrt{1-x^2} \end{array} \right. \quad et \quad \varphi_2 : \left| \begin{array}{ccc}]-1,1[& \longrightarrow &]-\infty,0[\\ x & \longmapsto & -\sqrt{1-x^2} \end{array} \right.$$

2) Différentielle de la fonction implicite

Développement limité

Exemple 18. *Soit* $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \sin y + xy^4 + x^2 \end{array} \right.$. *Par le théorème des fonctions implicites, il existe V et W des voisinages ouverts de 0 dans $\mathbb{R}$ et $\varphi : V \to W$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ telle que $\varphi(x) = y$. Cette application φ admet un développement limité à l'ordre 6 au voisinage de 0 : $\varphi(x) = -x^2 - \frac{x^6}{6} + \mathcal{O}(x^7)$.*

Expression générale

Remarque 19. *Le théorème des fonctions implicites assure l'existence de $D\varphi(x)$ sur V.*

Proposition 20. *On a $D\varphi(x) = -(D_y f(x,\varphi(x)))^{-1} \circ D_x f(x,\varphi(x))$.*

Exemple 21. *En reprenant l'équation $x^2+y^2-1=0$, on obtient $2x+2yy'=0$ en dérivant par rapport à x. y étant pris sur un ouvert de sorte que $y \neq 0$, on peut finalement écrire que $\varphi'(x) = y' = -\frac{x}{y}$.*

3) Application

Proposition 22. *Soient $P_0 \in \mathbb{R}_n[X]$ et x_0 une racine simple de P_0. Alors il existe une application φ de classe $\mathcal{C}^\infty$ définie sur un voisinage U de P_0 dans $\mathbb{R}_n[X]$ à valeurs dans un voisinage V de x_0 dans $\mathbb{R}$ telle que :*

$$\forall\, P \in U,\ \forall\, x \in V,\ x = \varphi(P) \Leftrightarrow P(x) = 0$$

Définition 23. On dit que la racine x_0 dépend localement du polynôme P_0 de manière $\mathcal{C}^\infty$.

III Applications aux sous-variétés

1) Sous-variétés

Définition 24. Une partie M de $\mathbb{R}^n$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^k$ et de dimension d si, pour tout $a \in M$, il existe un voisinage U de a dans $\mathbb{R}^n$ et $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ un difféomorphisme sur son image tel que :

$$\phi(U \cap M) = \phi(U) \cap (\mathbb{R}^d \times \{0\})$$

On dit que (U,ϕ) est une carte locale en a.

Théorème 25. *Soit M une partie de $\mathbb{R}^n$. Les deux assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) M est une sous-variété de classe $\mathcal{C}^k$ et de dimension d.

(ii) Pour tout $a \in M$, il existe un voisinage U de a dans $\mathbb{R}^n$ et des applications $g_1, \dots, g_{n-d} : U \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^k$ telles que :

  (a) Les formes linéaires $d_x g_1, \dots, d_x g_{n-d}$ sont linéairement indépendantes pour tout $x \in U$.

  (b) $U \cap M = \{x \in U \,|\, \forall\, i \in [\![1, n-d]\!],\ g_i(x) = 0\}$

2) Espaces tangents

Définition 26. Soit M une sous-variété de $\mathbb{R}^n$. Un vecteur $v \in \mathbb{R}^n$ est dit tangent à M en $a \in M$ s'il existe une application différentiable $\gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\to \mathbb{R}^n$, où $\varepsilon > 0$, telle que :

(i) $\forall\, t \in]-\varepsilon, \varepsilon[,\ \gamma(t) \in M$

(ii) $\gamma(0) = a,\ \gamma'(0) = v$

On note T_aM l'ensemble des vecteurs tangents à M en a, appelé espace tangent à M en a.

Théorème 27. *L'ensemble T_aM est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ de dimension d.*

Lemme 28. *Soit $\ell_1, \dots, \ell_d$ des formes linéaires sur $\mathbb{R}^n$ qui sont linéairement indépendantes. Alors $\dim \bigcap_{i=1}^{n-d} \operatorname{Ker} \ell_i = n - d$.*

Proposition 29. *Soit M une sous-variété de dimension d de $\mathbb{R}^n$. Soient $a \in M$ et U un voisinage de a dans $\mathbb{R}^n$. Soient $g_1, \dots, g_{n-d} : U \to \mathbb{R}$ des fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ telles que :*

(i) Les formes linéaires $d_x g_1, \dots, d_x g_{n-d}$ sont linéairement indépendantes pour tout $x \in U$.

(ii) $U \cap M = \{x \in U \mid \forall i \in [\![1, n-d]\!],\ g_i(x) = 0\}$

Alors $T_a M = \bigcap_{i=1}^{n-d} \operatorname{Ker} d_a g_i$.

3) Extrema liés

Définition 30. Soit M une sous-variété de $\mathbb{R}^n$. On dit qu'une fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ a un extremum lié (ou relatif) en $a \in M$ s'il existe un voisinage U de a dans $\mathbb{R}^n$ tel que $f(a)$ est un extremum de f sur $M \cap U$.

Théorème 31 (Extrema liés)**.** *Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Soient $g_1, \dots, g_k$ des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ de U dans $\mathbb{R}$ telles que les formes linéaires $d_x g_1, \dots, d_x g_k$ sont linéairement indépendantes pour tout $x \in U$. Posons :*

$$M = \{x \in U \mid \forall i \in [\![1, k]\!],\ g_i(x) = 0\}$$

Alors, si f a un extremum lié en $a \in M$, il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ tels que :

$$d_a f = \sum_{i=1}^{k} \lambda_k \, d_a g_i$$

Ces réels $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ sont appelés multiplicateurs de Lagrange.

Développements

— Lemme de Morse (14,15) [Rou]

— Extrema liés (28,29,31) [Ave]

Références

[BMP] Vincent Beck, Jérôme Malick, and Gabriel Peyré. *Objectif Agrégation*

[Gou] Xavier Gourdon. *Les Maths en Tête : Analyse.* Ellipses

[Rou] François Rouvière. *Petit Guide de Calcul Différentiel.* Cassini

[Ave] André Avez. *Calcul différentiel.* Masson

Annexes

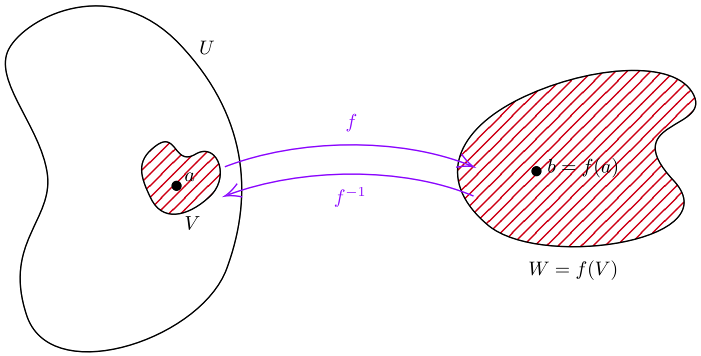

FIGURE 1 – Théorème d'inversion locale

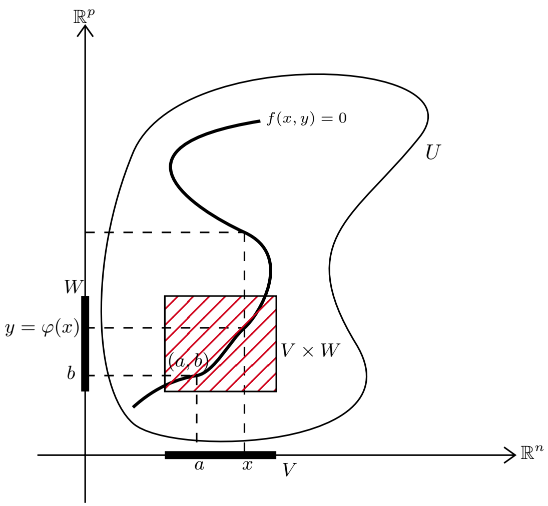

FIGURE 2 – Théorème des fonctions implicites

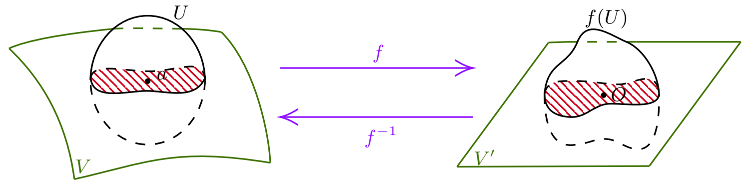

FIGURE 3 – Sous-variété

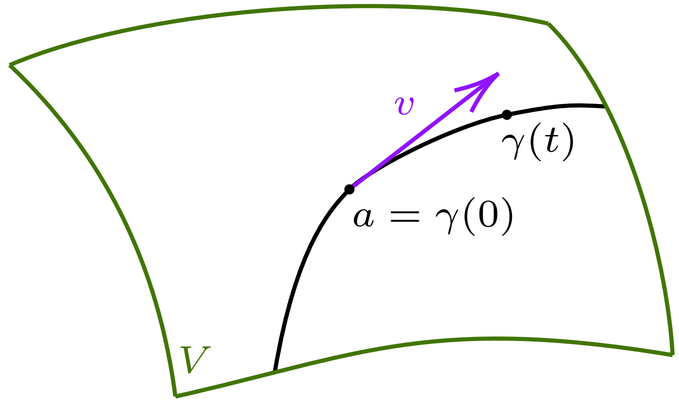

FIGURE 4 – Vecteur tangent à V en a